МГТУ им. Н.Э.Баумана

В.Г.Голубев, М.А.Яковлев

Методические указания к решению задач по курсу общей физики

Раздел «Электростатика»

Под редакцией О.С. Литвинова
Москва, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В методическом пособии содержится краткий обзор основных методов решения задач по электростатике. Помимо рассмотрения традиционных методов определения электрического поля распределенных зарядов в вакууме и диэлектриках, в пособии рассматриваются также методы, редко упоминаемые в учебной литературе, но достаточно эффективные для решения задач – метод электростатических отображения, метод повторяющихся элементов и другие.

Для студентов 2-го курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

§1. Основные сведения по теории

В основе всех представлений электростатики лежат понятия электрического заряда и связанного с ним электрического поля, возникающего в окружающем пространстве. Одной из характеристик этого поля является векторная величина $\vec{E}$ - напряженность электрического поля. Это силовая характеристика поля, определяемая отношением силы $\vec{F}$, действующей на заряд к величине этого заряда q:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

В случае диэлектриков электрическое поле характеризуется также вектором электрического смещения $\vec{D}$ и вектором поляризации $\vec{P}$.

Связь между этими векторами, в случае если диэлектрики занимают область между эквипотенциальными поверхностями:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\vec{D}.$$

где - ε и ε_0 относительная проницаемость вещества и абсолютная проницаемость вакуума.

Сила F, действующая на неподвижный точечный заряд равна: $\vec{F} = q\vec{E}$.

Поле неподвижного точечного заряда q равно $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$.

где $\vec{r}$ - радиус вектор, соединяющий заряд и данную точку пространства.

Принцип суперпозиции для любой системы зарядов q_i имеет вид:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i,$$

где $\sum_i \vec{E}_i$ - сумма векторов напряженности создаваемых точечными зарядами или заряженными телами, входящими в систему.

Теорема Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \text{ - для вакуума,}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q+q'}{\varepsilon_0}$$ - для диэлектриков,

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}d\vec{S} = q$$ - для диэлектриков,

$$\Phi_P = \oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q'.$$

Где Φ - поток вектора ($\vec{E}$, $\vec{D}$ или $\vec{P}$) через произвольную замкнутую поверхность, $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ - единичный вектор нормальный к площадке площадью dS, q - алгебраическая сумма свободных зарядов охватываемых замкнутой поверхностью, q' - суммарный связанный заряд охватываемый замкнутой поверхностью.

Для потенциала электростатического поля справедливо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_L \vec{E}d\vec{l}$$

где φ_1, φ_2 - потенциалы в точках 1 и 2, $\int_L \vec{E}d\vec{l}$ - криволинейный интеграл по произвольной траектории между точками 1 и 2.

Связь между $\vec{E}$ и φ в декартовой системе координат:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad\varphi}.$$

Потенциал поля создаваемый точечным зарядом q: $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Принцип суперпозиции для системы точечных зарядов: $\varphi = \sum_i \varphi_i$

§2. Метод с использованием принципа суперпозиции.

Задача 2.1. Найти напряженность электрического поля в точке А, расположенной на расстоянии b от равномерно заряженного с линейной плотностью τ отрезка. Углы α_1 и α_2 заданы (см.рис.2.1.).

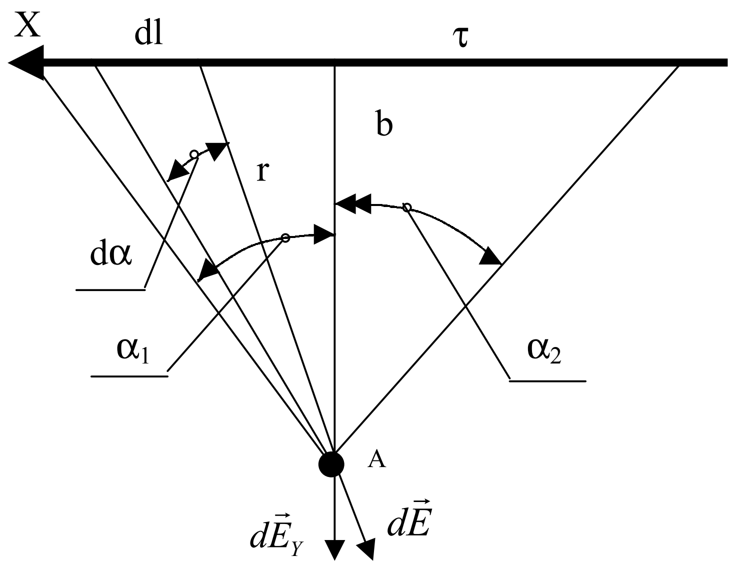

Рис.2.1.

Решение:

Разобьем отрезок на бесконечно малые участки dl, каждый из которых имеет элементарный заряд $dq = \tau\, dl$ и создает в точке А напряженность поля:

$$d\vec{E} = \frac{dq\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

r- расстояние от точки А до участка dl.

Результирующий вектор напряженности $\vec{E}$ является векторной суммой элементарных векторов $d\vec{E}$, и проекция результирующих векторов напряженности E_y и E_x на ось y и x равна сумме элементарных проекций dE_y и dE_x соответственно.

$$r = \frac{b}{\cos\alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ad\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cos\alpha = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_o b}\cos\alpha,$$

$$dE_x = -dE\sin\alpha = -\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_o r^2}\sin\alpha = -\frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_o b}\sin\alpha.$$

$$E_x = -\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\tau \sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_o b} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o b}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

$$E_y = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\tau \cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_o b} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o b}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2),\ E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

Используя метод разбиений можно определить напряженность электрического поля в произвольной точке от линейного заряженного участка. В частности, для бесконечной нити ($\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = \pi/2$):

$$E = E_y = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o b}, E_x = 0.$$

Задача 2.2. Определить напряженность электрического поля в точке А, созданного диском радиуса r_0 равномерно заряженным поверхностной плотностью σ. Точка расположена на оси диска на расстоянии *a* от его центра (Рис.2.2).

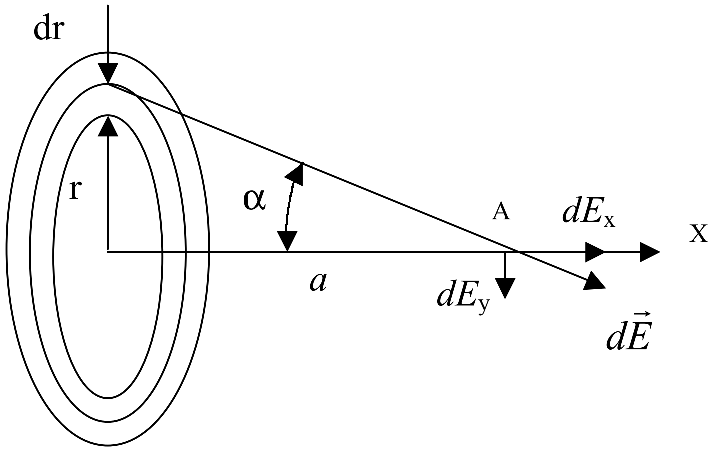

Рис.2.2.

Решение. Используем пошаговый метод решения.

Шаг 1. С учетом симметрии задачи простейшими геометрическими элементами (см.рис.2.2.), с помощью которых можно представить диск, являются концентрические кольца радиуса *r* толщиной *dr*.

Шаг 2. Определим напряженность электрического поля dE_A в точке А, создаваемую одним кольцом. В силу симметрии задачи $dE_{Ay} = dE_{Az} = 0$.

Разобьем кольцо на элементарные дуги *dl*. Заряд такой дуги равен $dq = \sigma dr dl$.

Проекция dE_x напряженности поля на ось *x*, создаваемая этим зарядом равна:

$$dEx = \frac{\sigma drdl}{4\pi\varepsilon_0 R^2} cos\,\alpha\ ,$$

где $R=a/cos\alpha$ – расстояние от элемента dl до точки А.

$$dE_{Ax} = \oint\limits_{2\pi r} \frac{\sigma drdl}{4\pi\varepsilon_O a^2} cos^3\alpha = \frac{\sigma rdr}{2\varepsilon_O a^2} cos^3\alpha = \frac{\sigma d\alpha}{2\varepsilon_O} sin\,\alpha, \quad r = atg\alpha, \quad dr = \frac{ad\alpha}{cos^2\alpha}.$$

$$E_{Ax} = \int\limits_0^{\alpha_o} dE_{Ax} = \int\limits_0^{\alpha_O} \frac{\sigma d\alpha}{2\varepsilon_O} \sin\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_O}(1-\cos\alpha_0), \quad \cos\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}}.$$

Для бесконечного диска или бесконечной плоскости $\alpha_0 = \pi/2$, $E_{Ax} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_O}$.

Задача 2.3. Сфера радиуса R равномерно заряжена по поверхности поверхностной плотностью заряда σ. Определить напряженность электрического поля в центре очень маленького отверстия на поверхности сферы (рис.2.3).

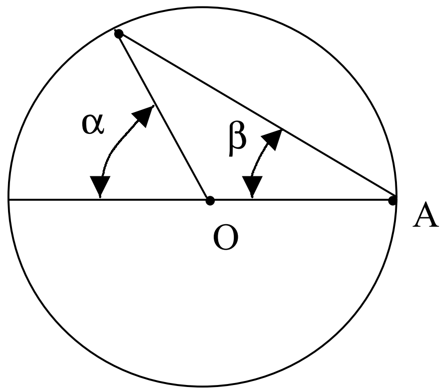

Рис.2.3.

Решение задачи 2.3.

Пусть отверстие находится в точке А.

Шаг 1. Представим поверхность сферы в виде колец вырезаемых радиус-векторами направленными из центра сферы под углами α и α + dα отрезку ОА. Тогда эквивалентная линейная плотность заряда вдоль дуги этого кольца равна $d\tau = \sigma Rd\alpha$. Напряженность электрического поля в точке А, создаваемая этим кольцом равна:

$$dE = \frac{d\tau 2\pi R\,sin\,\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \left(2R\,cos\,\beta\right)^2} cos\,\beta\,.$$

Поскольку $\alpha = 2\beta$, то $dE = \dfrac{\left(d\tau 4\pi R\,sin\,\beta\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(2R\right)^2} = \dfrac{\sigma\,sin\,\beta d\beta}{2\varepsilon_0}$.

Шаг 2.Напряженность электрического поля создаваемая сферой в центре маленького отверстия получится путем интегрирования по всей поверхности:

$$E = \int\limits_S dE = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sigma \sin\beta d\beta}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

(2-й способ).

Определим напряженность электрического поля E_0 непосредственно у поверхности сферы при отсутствии маленького отверстия. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса для сферической поверхности радиуса r =R+dr.

$$E_0 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^2 \sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

E_0 - сумма напряженностей, создаваемых сферой с маленьким отверстием и маленького участка заряженной поверхности закрывающего это отверстие.

$$E_0 = E_{сф} + E_{отв}$$

Маленький участок заряженной поверхности можно считать плоскостью для точек бесконечно близких к этой поверхности. Тогда для плоскости

$E_{отв} = \sigma/2\varepsilon_0$ вне сферы, и $E_{отв} = -\sigma/2\varepsilon_0$ внутри сферы вблизи поверхности сферы.

Отсюда напряженность, создаваемая сферой в центре маленького отверстия равна: $E_{сф} = E_0 - E_{отв} = \sigma/2\varepsilon_0 = E$.

Следовательно, результаты обоих способов решения совпадают. Второй способ проще, т.к. удалось избежать интегрирования. В данном методе мы дополнили сферу до сферически симметричного случая, заполнив отверстие.

§3. Метод решения задач с использованием теоремы Гаусса.

Задача 3.1 Шар радиуса R заряжен равномерно по объёму. Объёмная плотность заряда равна ρ. Внутри шара находится сферическая полость радиуса R_0. Расстояние между центрами шара и полости равно *a*. Определить напряженность электрического поля в полости.

Решение.

В решении задачи используется принцип суперпозиции электрических полей для заряженных тел и метод дополнения из задачи 2.3. Для этого заданную систему зарядов можно представить в виде суперпозиции двух тел, а именно, шара радиуса R заряженного равномерно по объему плотностью +ρ и шара радиуса R_0 заряженного объемной плотностью -ρ**,** помещенного на место полости. Найдем сферически симметричное распределение электрического поля в шаре, заряженном объемной плотностью ρ**.** Теорема Гаусса для концентрической сферической поверхности радиуса r, расположенной внутри такого шара дает:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \ ,$$

$D = \rho \dfrac{r}{3}$, или в векторной форме $\vec{D} = \rho \dfrac{\vec{r}}{3}$.

Тогда напряженности электрического поля E_+ и E_- для шаров радиуса R и R_0 соответственно равны:

$$\vec{E}_+ = +\rho \frac{\vec{r}_+}{3\varepsilon_0}, \ \vec{E}_- = -\rho \frac{\vec{r}_-}{3\varepsilon_0} \ ,$$

где - $\vec{r}_+$ и $\vec{r}_-$ - радиус-векторы, проведенные из центров соответствующих шаров в произвольную точку находящуюся внутри малого шара.

Откуда результирующее поле *E***:**

$$\vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_- = \rho \frac{\vec{r}_+ - \vec{r}_-}{3\varepsilon_0} = \rho \frac{\vec{a}}{3\varepsilon_0} \ ,$$

где $\vec{a}$ – вектор, проведенный из центра большого в центр малого шара.

Задача 3.2. Два заряда противоположного знака, величины которых соответственно равны q и Q=2q, расположены на расстоянии L друг от друга вдоль оси X. Определить на каком расстоянии от оси X, силовая линия, исходящая из заряда q, под углом α к оси X, пересекает плоскость перпендикулярную оси X находящуюся посредине между зарядами.

Решение.

Пусть начало координат совпадает с зарядом q.

Предположим, что силовая линия, выходящая из заряда q под углом α пересекает плоскость, перпендикулярную оси X и находящуюся на расстоянии x от заряда q и на расстоянии r от оси системы (см. рис.3.1). Выберем замкнутую конусообразную поверхность, вершина которой совпадает с зарядом q, образующей является искомая силовая линия, высота равна x, а основание круг

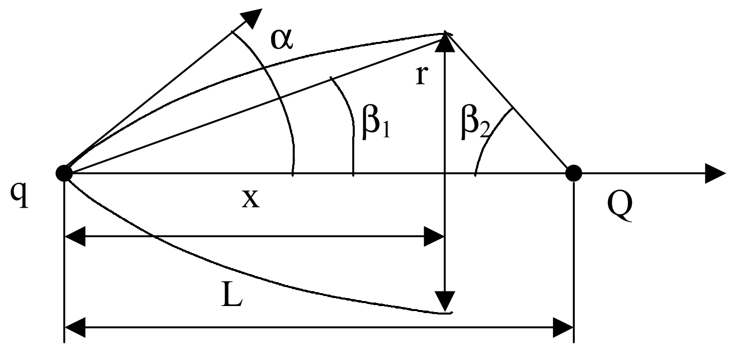

Рис.3.1.

радиусом r. Запишем теорему Гаусса для заданной замкнутой поверхности.

$$\Delta q = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon_0 \left(\Phi_1 + \Phi_2 \right)$$

где Δq - часть заряда заключенного внутри конусообразной поверхности.

Φ_1 - поток вектора E через боковую поверхность конуса, который очевидно равен 0, т.к. вектор напряженности $\vec{E}$ во всех точках касателен к боковой поверхности. Φ_2 - поток вектора $\vec{E}$ через основание конусообразной поверхности.

Очевидно, что поток Φ_2 можно рассчитать, как сумму потоков создаваемых зарядами q и Q через окружность радиуса r, отстоящую от центра зарядов на расстояния x и (L – x) соответственно. Тогда поток Φ_2 можно записать:

$$\Phi_2 = \frac{\left(q\Omega_1 + Q\Omega_2\right)}{4\pi\varepsilon_0}$$

где Ω_1 и Ω_2 телесные углы, вершины которых совпадают с зарядами q и Q соответственно, и опирающиеся на окружность радиуса r, а β_1 и β_2 соответствующие им углы при вершинах конусов (рис. 3.2.).

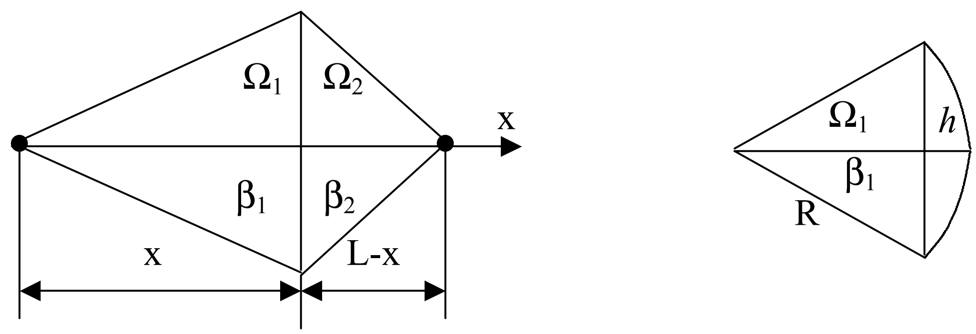

Рис. 3.2.

Связь между этими углами подчинена следующим соотношениям:

$$S_{сеч} = 2\pi Rh, \quad h = R - R\cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right) = R\left(1 - \cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right),$$

$$\Omega_1 = \frac{S_{сеч}}{R^2} = \frac{2\pi R^2(1-\cos(\frac{\beta_1}{2}))}{R^2} = 2\pi(1-\cos(\frac{\beta_1}{2})),$$

$$\Omega_1 = 2\pi\left(1-\cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right), \quad \Omega_2 = 2\pi\left(1-\cos\left(\frac{\beta_2}{2}\right)\right).$$

Далее между углами β_1, β_2, x и r существует связь.

$$\cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} \text{ и } \cos\left(\frac{\beta_2}{2}\right) = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+r^2}}, \; x = \frac{L}{2} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$$

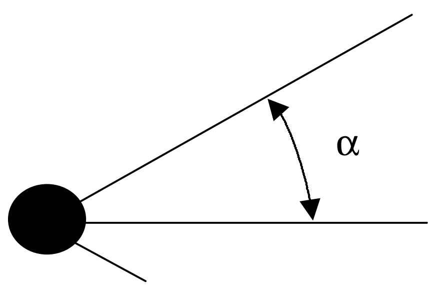

Рис. 3.3.

Пусть Δq - часть заряда q, попавшего внутрь конусообразной поверхности, с полууглом при вершине α: $\Delta q = 2\pi q\dfrac{1-\cos\alpha}{4\pi}$.

С учетом теоремы Гаусса для конусообразной поверхности получаем:

$$\Delta q = \varepsilon_0 \Phi_2 = \frac{\left(q\Omega_1 + Q\Omega_2\right)}{4\pi} = 2\pi q\,\frac{1-\cos\alpha}{4\pi}.$$

Тогда

$$q\left(1-\cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right)+Q\left(1-\cos\left(\frac{\beta_2}{2}\right)\right)=q\left(1-\cos\alpha\right),$$

учитываем $\beta_1 = \beta_2$ и Q=$2q$, следовательно,

$$3-3\cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=1-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=\frac{2+\cos\alpha}{3}.$$

Но $\beta_1 = 2\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)$.

Окончательно: $r = \dfrac{L}{2(2+\cos\alpha)}\sqrt{9-(2+\cos\alpha)^2}$.

Задача 3.3. Сферический диэлектрический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок 2R и R соответственно. Заряд конденсатора равен q. Диэлектрическая проницаемость меняется между обкладками по закону

$\varepsilon = \dfrac{5R^2}{R^2+r^2}$. Определить закон изменения векторов $\vec{E}$, $\vec{P}$ и $\vec{D}$, поверхностную плотность связанных зарядов и общую величину связанного заряда на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика, распределение объёмной плотности связанных зарядов ρ′(r) и величину связанного заряда в объёме диэлектрика, емкость конденсатора, максимальную напряженность электрического поля E и электрического смещения D.

Решение:

Определим зависимость модуля векторов E, D, P от радиуса r в предположении, что заряд внутренней и внешней обкладки равны + q и -q соответственно. Для изотропной среды связь между этими векторами определяется соотношениями

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{P} = \left(\varepsilon-1\right)\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{P} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\vec{D}.$$

Тогда, применив теорему Гаусса для сферы радиуса r: $4\pi r^2 D = q$

получим для модулей векторов E, D, P:.

$$D=\frac{q}{4\pi r^2},\ E=q\frac{R^2+r^2}{20R^2\pi\varepsilon_0 r^2},\ P=q\frac{4R^2-r^2}{20R^2r^2}.$$

Поверхностную плотность связанных зарядов можно определить из соотношения $P_n=\sigma'$, $\sigma'(R)=3q/20\pi R^2$, $\sigma'(2R)=0$.

Полный связанный заряд на внутренней поверхности равен:

$$q'_{вн}=\sigma'(R)\,4\pi R^2=3q/5.$$

Объёмную плотность связанных зарядов определим из уравнения:

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S}=-q'.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем две концентрические сферические поверхности радиусами r и r+dr**.** Тогда:

$$d(P4\pi r^2)=-dq',$$

где $-dq'=\rho'(4\pi r^2(dr))$ - величина связанного заряда, заключенного между этими сферическими поверхностями. Отсюда – $\rho'=-(q/10\pi rR^2)$.

Полный заряд в объёме диэлектрика - $q=\int\rho' 4\pi r^2dr=-\frac{3}{5}q$.

Емкость конденсатора можно определить, найдя разность потенциалов между обкладками:

$$\Delta\varphi=-\int Edr=\int q\frac{R^2+r^2}{20R^2\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{20R^2\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{R^2}{r^2}+1\right)dr=\frac{3q}{40\pi\varepsilon_0 R},$$

- где интеграл берется в пределах от R до R_0. Далее по определению емкости конденсатора $C=q/\Delta\varphi$.

Задача 3.4. Шарик радиуса R из диэлектрика, с диэлектрической проницаемостью ε помещен в однородное электрическое поле E_0. Определить величину и напряженность электрического поля в точке $Y=Y_1$, $X=X_1$ (Y_1, $X_1<R$).

Решение.

Под действием электрического поля происходит поляризация диэлектрика. Поляризацию можно представить как смещение положительных и отрицательных связанных зарядов объёмной плотностью $\rho'=\rho'_+=\rho'_-$ относительно друг друга на величину, определяемую вектором $\vec{\delta}$. При этом для вектора поляризованности выполняется соотношение $\vec{P}=\rho'\vec{\delta}$. Следовательно, можно рассматривать

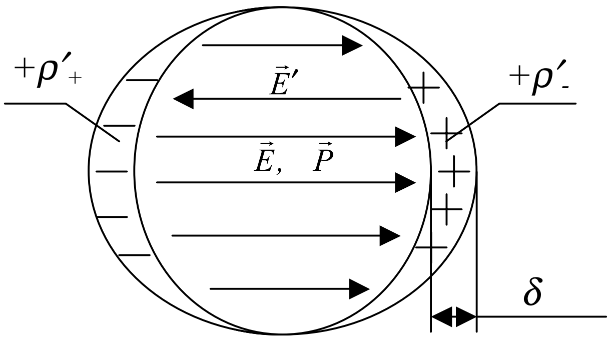

Рис.3.4

электрическое поле связанных зарядов, как суперпозицию электрических полей двух шаров, радиусы которых равны R, равномерно заполненных объемной плотностью заряда $+\rho$ и $-\rho$ соответственно и смещенных на вектор $\vec{\delta}$. Выберем величину $\delta \ll R$. Тогда можно считать, что на поверхности шара радиуса R находится поверхностная плотность связанных зарядов σ', причем поверхностная плотность в точке C(σ'_c) связана с величиной вектора поляризованности P и величинами ρ' и δ следующими соотношениями: $P=(\varepsilon-1)\varepsilon_o E=\rho'\delta$, $P=\sigma'_c$. Электрическое поле E'_+(E'_-) внутри равномерно заряженного по объему шара создаваемое положительным зарядом ρ'_+ (отрицательным ρ'_-) равно:

$$\vec{E}'_+ = \frac{\rho'_+}{3\varepsilon_0}\vec{r}_+, \quad \vec{E}'_- = \frac{\rho'_-}{3\varepsilon_0}\vec{r}_-,$$

где $\vec{r}_+$ и $\vec{r}_-$ - радиус-векторы, проведенные в данную точку из центров положительно и отрицательно заряженных шаров соответственно, для которых справедливо $\vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{\delta}$.

Результирующее электрическое поле связанных зарядов равно суперпозиции этих электрических полей: $\vec{E}' = \vec{E}'_+ - \vec{E}'_- = -\dfrac{\rho'}{3\varepsilon_0}\vec{\delta} = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

Однородное электрическое поле внутри шара E равно:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\varepsilon - 1}{3}\vec{E}.$$

Откуда: $\vec{E} = \dfrac{3}{2+\varepsilon}\vec{E}_0$.

§4. Решение задач с использованием метода электростатических изображений.

Задача 4.1. Над заземленной плоской металлической пластиной находится положительный заряд q на расстоянии a от пластины. Определить плотность поверхностного заряда на пластине и показать, что полный заряд на пластине по величине равен q.

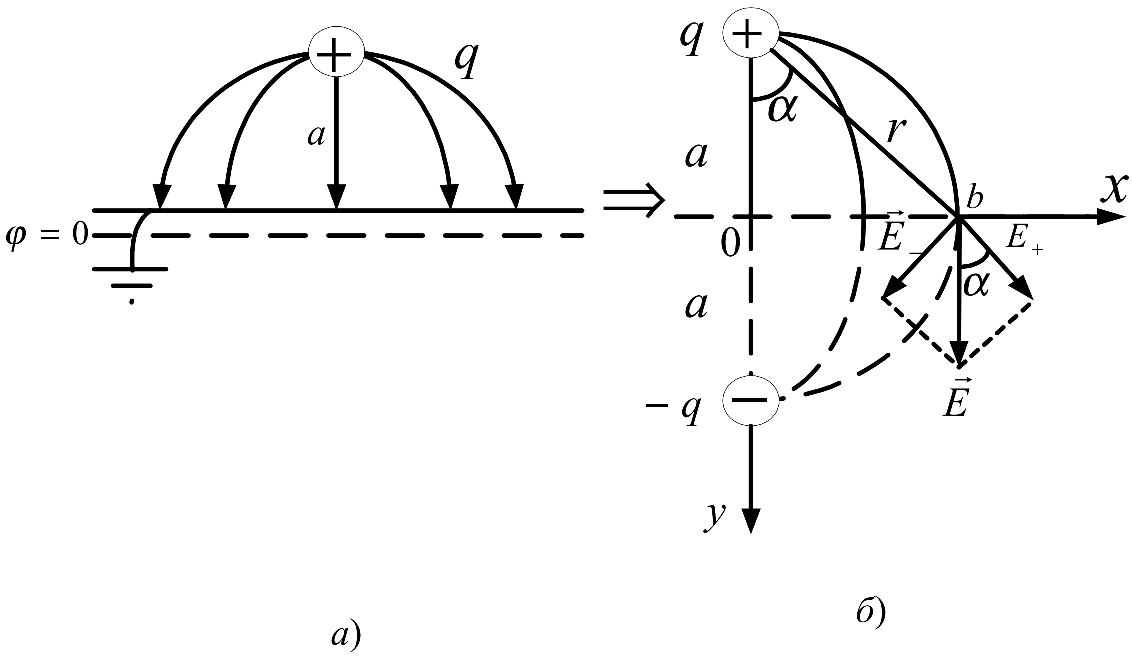

Рис.4.1

Решение.

Исходная система – это положительный заряд и заземленная плоскость с наведенным на нее отрицательным зарядом (см. рис. 4.1, *а*), она эквивалентна системе 2-х зеркальных зарядов (см. рис. 4.1, *б*). Действительно, электрическое поле от двух зеркальных зарядов в верхней полуплоскости полностью совпадает с исходным электрическим полем. Кроме того, на плоскости симметрии (ось ОХ) потенциал, создаваемый зарядами φ=0 (как и заземленной плоскости), а напряженность электрического поля перпендикулярна плоскости и направлена по оси ОУ:

$$E_B = E_Y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{(a^2 + x^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

С другой стороны поле у поверхности заряженного проводника: $E_B = \dfrac{\sigma(x)}{\varepsilon_0}$.

Таким образом получаем**:**

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q \cdot a}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

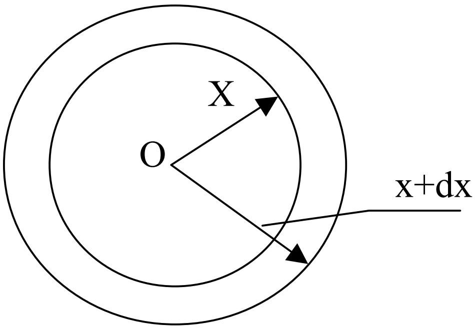

Рис.4.2.

Определим полный заряд индуцированной не заземленной плоскости. Разобьем плоскость на совокупность концентрических колец относительно точки О (Рис. 4.2.). Тогда заряд на кольце (x, x+dx):

$$dQ = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi x dx$$

Полный заряд Q на плоскости равен:

$$Q = -\int_0^\infty \frac{qaxdx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -qa\left(-\frac{1}{(a^2 + x^2)^{1/2}}\Big|_0^\infty\right) = -q.$$

Задача 4.2 Заряд q расположен внутри угла, образованного большим плоским металлическим листом, согнутым под углом 90°, на расстоянии a и b от плоскостей. Определить силу, действующую на заряд.

Решение. Плоская эквипотенциальная поверхность образуется любой системой зарядов, имеющей относительной данной плоскости зеркальную симметрию. Применительно к данной задаче, квадрупольная конфигурация зарядов образует систему двух пересекающихся под прямым углом эквипотенциальных плоскостей.

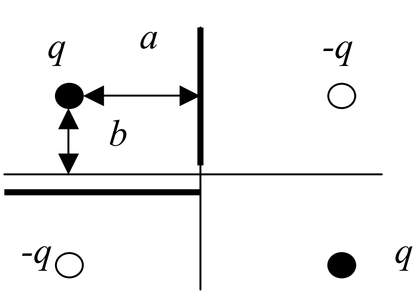

Рис.4.3

Тогда, согнутый под прямым углом лист можно заменить двумя отрицательными зарядами и одним положительным. Откуда сила, действующая на заряд равна:

$$F_x=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2a\right)^2}+\frac{2q^2a}{4\pi\varepsilon_0\left(\left(2a\right)^2+\left(2b\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\right).$$

$$F_y=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2b\right)^2}+\frac{q^2\,2b}{4\pi\varepsilon_0\left(\left(2a\right)^2+\left(2b\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2b}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\right).$$

Задача 4.3 Заряд q находится на расстоянии a от центра заземленной металлической сферы радиуса R. Определить силу взаимодействия между сферой и зарядом.

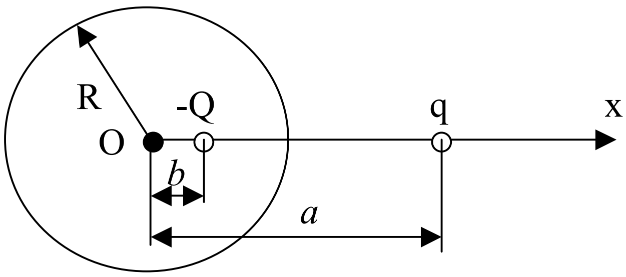

Рис.4.4.

Решение. Пусть начало координат находится в точке O. На расстоянии b от центра сферы поместим заряд Q противоположного знака.

Предположим, что на поверхности сферы радиуса R потенциал равен 0. Тогда для точки на поверхности сферы:

$$\frac{Q^2}{(x-b)^2+y^2}=\frac{q^2}{(a-x)^2+y^2};\frac{Q}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}-\frac{q}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=0,$$

учитывая, что $x^2+y^2=R^2$,

$$\frac{R^2+b^2-2bx}{Q^2}=\frac{R^2+a^2-2ax}{q^2};\quad \frac{\dfrac{\left(b^2+R^2\right)}{2b}-x}{Q^2/2b}=\frac{\dfrac{\left(a^2+R^2\right)}{2a}-x}{q^2/2a},$$

откуда видно, что уравнение обращается в тождество при любых x в случае, когда

$$\frac{Q^2}{2b}=\frac{q^2}{2a},\ \frac{b^2+R^2}{2b}=\frac{a^2+R^2}{2a};\ \frac{R^2+b^2\big/2b-x}{Q^2\big/2b}=\frac{a^2+R^2\big/2a-x}{q^2\big/2a}$$

далее

$$\frac{\left(b^2+R^2\right)}{\left(a^2+R^2\right)}=\frac{b}{a}=\frac{Q^2}{q^2},\ \left(a^2b+R^2b\right)=\left(ab^2+R^2a\right),\ ab=R^2,$$

Окончательно

$$\frac{Q}{q}=\frac{R}{a}=\frac{b}{R};\quad Q=q\cdot\frac{R}{a},$$

Полученную сферическую поверхность радиуса R можем использовать, поместив на неё заземленную сферу, потенциал которой равен 0. Тогда заряд на внешней поверхности сферы равен –Q и вместе с зарядом q образует систему зарядов, совпадающей с условием задачи. При этом электрическое поле вокруг заряда q не изменилось и поэтому силу, действующую на заряд q можно рассчитать, как силу взаимодействия между точечными зарядами. Из полученных выше соотношений:

$$Q = q\frac{R}{a},\ b = \frac{R^2}{a},\ F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 (a-b)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{R}{a}\left(\frac{a^2}{R} - R\right)^2}.$$

Следовательно: $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{R}{a}\left(\frac{a^2}{R} - R\right)^2}$.

Задача 4.4 Заряд *q* находится на расстоянии *a* от центра металлической сферы радиуса R, заряженной зарядом q_0. Определить потенциал сферы и силу взаимодействия между сферой и зарядом.

Решение. Воспользуемся результатом задачи 4.3, поместим на расстоянии $b=R^2/a$ от центра сферической поверхности радиуса R отрицательный заряд величиной $Q=qR/a$. Дополнительно в центр сферической поверхности поместим заряд $q_1=q_o+Q$, при этом сферическая поверхность останется эквипотенциальной. Потенциал сферической поверхности складывается из потенциала создаваемого зарядами q и –Q, равного 0 и потенциала создаваемого зарядом (q_o+Q).

Откуда потенциал сферы равен: $\varphi = \dfrac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Сила, действующая на заряд q:

$$F = \frac{q(q_0 + Q)}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 (a-b)^2} = \frac{q(q_0 + qR/a)}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{q^2 R/a}{4\pi\varepsilon_0 \left(a - R^2/a\right)^2}$$

$$= \frac{q(q_0 + qR/a)}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{q^2 Ra}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 - R^2\right)^2}.$$

Задача 4.5. На бесконечной металлической плоскости имеется шаровидный выступ, радиус и высота которого равна R. Определить напряженность поля в верхней точке выступа, если на большом удалении от выступа электрическое поле однородно и напряженность его равна E_0.

Решение. Пусть в однородном электрическом поле, напряженность которого равна E_0, находится электрический диполь, ориентированный по направлению электрического поля с дипольным моментом равным $\vec{p}$. Пусть плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{E}$ и проходящая через диполь имеет потенциал равный 0. Определим потенциал, создаваемый электрическим диполем в точке на расстоянии r от него под углом к оси диполя равным α. Пусть расстояния от положительного и отрицательного заряда диполя до данной точки равны соответственно r_1, r_2. Расстояние между зарядами диполя l. Так как диполь точечный, то $r_2 - r_1 = l\cos\alpha$, а $r_2 \cdot r_1 = r^2$.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\cos\alpha = \frac{p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Тогда, общий потенциал диполя и однородного электрического поля φ_o можно записать в виде:

$$\varphi_0 = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \vec{E}_0\vec{r} = \vec{r}\left(\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \vec{E}_0\right),$$

так как направления $\vec{p}$ и $\vec{E}$ одинаковые, в верхней точке выступа получим:

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0 = 0.$$

Поверхность нулевого потенциала представляет собой пересекающиеся плоскость и сферу радиуса R, что соответствует условиям задачи. Тогда, поле в верхней точке сферического выступа E равно суперпозиции поля E_0 и поля точечного диполя, расположенного в центре сферы.

$$E = E_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = E_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2 r_1^2} = E_0 + \frac{2p}{4\pi\varepsilon_o r^3} = 3E_0.$$

Ответ: $E = 3E_0$.

§5. Метод решения задач с использованием понятия энергии электрического поля

При решении задач с использованием понятия «энергия электрического поля», необходимо иметь четкое представление способах нахождения энергии системы точечных зарядов и энергии распределенных зарядов.

Введем понятие *энергии взаимодействия системы зарядов*. Для этого рассмотрим систему из двух точечных зарядов q_1 и q_2. Пусть заряд q_1 неподвижен, а заряд q_2 перемещается из бесконечности в точку пространства, находящуюся на расстоянии r_{12} от заряда q_1. Как известно в этом случае силы электрического поля совершают работу

$$A = q_2\left(\varphi_\infty - \varphi_2\right),$$

где $\varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$ - потенциал, создаваемый на расстоянии r_{12} от него, φ_∞ - потенциал, создаваемый зарядом q_1 на бесконечности можно положить равным нулю. другой стороны работу сил электрического поля можно представить как убыль потенциальной энергии этого поля W

$$A = -\Delta W = -\left(W_2 - W_\infty\right).$$

Считаем, что энергия взаимодействия точечных зарядов на бесконечном расстоянии $W_\infty = 0$. Откуда получим выражение для энергии взаимодействия двух точечных зарядов:

$$W_{B3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}.$$

Данное выражение можно представить в следующей форме:

$$W_{B3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i,$$

где n=2, $\varphi_i = \sum\limits_{j=1, i \neq j}^{n} \dfrac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$ - потенциал i-го заряда в поле остальных зарядов системы.

Таким образом, это выражение представляет собой энергию взаимодействия любого количества зарядов, причем энергия взаимодействия может принимать как положительное, так и отрицательное значение, в зависимости от знака зарядов системы.

При рассмотрении системы из зарядов, которые распределены по поверхности или в объёме, необходимо представить систему в виде системы точечных зарядов $\Delta q = \sigma\Delta S$ или $\Delta q = \rho\Delta V$, где ΔS и ΔV – элементы площади или объёма, на которые разбивается область распределенного заряда. Обобщая предыдущее соотношение можно записать следующее выражение для полной энергии системы распределенных зарядов:

$$W_{полн} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \Delta q_i ,$$

или переходя к бесконечно малым элементам

$$W_{полн} = \frac{1}{2}\int_{V,S}\varphi dq = \frac{1}{2}\int_{V}\varphi\rho dV = \frac{1}{2}\int_{S}\varphi\rho dS ,$$

где ρ - объёмная плотность заряда распределенного по объему, σ - поверхностная плотность заряда распределенного по поверхности.

В частном случае, если имеется изолированный заряженный проводник ёмкости C и зарядом q, *полная энергия* заряженного проводника *является собственной энергией* проводника $W_{собст}$

$$W_{собст} = \frac{1}{2}\sum\varphi\Delta q = \frac{1}{2}\varphi\sum\Delta q = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}\varphi^2 C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} .$$

При определении выражения для собственной энергии заряженного проводника было учтено, что все точки заряженного проводника имеют один и тот же потенциал и связь между зарядом q, потенциалом φ и емкостью C имеет вид $q = \varphi C$.

В общем случае, в системе заряженных тел полная электрическая энергия равняется сумме собственных энергий этих тел и энергий их взаимодействия.

$$W_{полн} = \sum W_{собств} + \sum W_{вз} .$$

Отметим, что собственная энергия заряженных тел всегда положительна.

Задача 5.1: Рассмотрим систему из двух заряженных проводящих тел с зарядами q_1 и q_2, емкостями C_1 и C_2. Пусть потенциалы проводников равны φ_1 и φ_2 соответственно. Определить потенциальную энергию взаимодействия этих тел.

Решение. Полную энергию этой системы можем определить так:

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}q_2\varphi_2 = W_{1собств} + W_{2собств} + W_{вз} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + W_{вз}.$$

Откуда:

$$W_{вз} = \frac{1}{2}\left(q_1\left(\varphi_1 - \frac{q_1}{C_1}\right) + q_2\left(\varphi_2 - \frac{q_2}{C_2}\right)\right).$$

Задача 5.2: Определить энергию плоского конденсатора емкостью C, если разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi$.

Решение. Если предположить, что заряженными телами являются две большие параллельные металлические пластины, заряженные зарядом противоположного знака q и –q, расстояние между которыми равно d, то получим для полной энергии:

$$W = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}q\Delta\varphi.$$

Эта энергия является энергией плоского заряженного конденсатора W, емкость которого:

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\sigma S}{\sigma d/\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \text{ откуда } W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}.$$

При выводе предыдущей формулы использовалось выражение для напряженности электрического поля между обкладками конденсатора

$$E = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0 = (\varphi_1 - \varphi_2)/d.$$

Задача 5.3: Определим объемную плотность электрической энергии плоского конденсатора заполненного диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, площадью обкладок равной S и расстоянием между обкладками равной d.

Решение. Емкость такого конденсатора равна $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$.

Откуда:

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S(Ed)^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{V} = \frac{DE}{2}\mathrm{V} = \mathrm{wV}.$$

где V – объем между обкладками конденсатора, заполненный однородным электрическим полем, w – объемная плотность энергии электрического поля.

$$\mathrm{w} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ – вектор электрического смещения.

Используя понятие объемной плотности энергии w, можно записать полную энергию электрического поля для произвольной системы зарядов:

$$W_{полн} = \iiint_V \mathrm{w} dV = \iiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV .$$

Таким образом, полная энергия электрического поля всегда положительна. Необходимо отметить, что энергия электрического поля точечного заряда, равна бесконечности. Поэтому, точечный заряд необходимо представлять в виде заряженного тела.

Покажем, что для рассмотренного выше примера 1, для двух заряженных с зарядами q_1 и q_2, сумма их собственных энергий всегда больше их энергии взаимодействия.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

где E - поле, создаваемое обоими телами, E_1 - первым и E_2 - вторым телом.

$$W_{полн} = \oiiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} dV = \oiiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0(E_1)^2}{2} dV + \oiiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0(E_2)^2}{2} dV +$$
$$\oiiint_V \varepsilon\varepsilon_0(\vec{E}_1\vec{E}_2) dV = W_{1собств} + W_{2собств} + W_{вз}$$

Так как, полная энергия $W_{полн}$ всегда положительна, собственные энергии первого W_1 и второго тела W_2 также положительны, энергия взаимодействия $W_{вз}$ может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Тогда при отрицательном значении $W_{вз}$ справедливо соотношение:

$$W_{1собств} + W_{2собств} \geq |W_{вз}|$$

При этом, если знаки взаимодействующих тел одинаковы, то энергия взаимодействия положительна, если разные, то отрицательна, при этом модуль энергии взаимодействия определяется только модулем зарядов q_1 и q_2. Следовательно, соотношение полной энергии взаимодействия справедливо и при положительном значении энергии взаимодействия.

Задача 5.4. Две одинаковые распределенные системы зарядов, собственная энергия которых равна W, полностью совместили в пространстве. Определить их энергию взаимодействия.

Решение. Очевидно, что в каждой точке пространства электрическое поле удвоится. Следовательно, полная энергия возрастет в четыре раза. Откуда:

$$W_{вз} = W_{полн} - W_{собств} = 4W - 2W = 2W.$$

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том III. М. Наука, 1977-1979.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Том II.:Наука, 1978-1986.
3. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. М.: Высшая школа, 1991.